ANNEE 2003

CONCOURS D'ADMISSION

A

L'ECOLE DE L'AIR

CONCOURS PC/PSI

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Coefficient : 13

L'attention des candidats est attirée sur le fait que la notation tiendra compte du soin et de la rigueur apportés dans le travail.

Nota : ***Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.***

T.S.V.P.

Le sujet est constitué de <u>deux problèmes indépendants</u> que le candidat pourra traiter dans un ordre indifférent.

PROBLÈME 1

1. On considère dans cette question la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier $n\geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{2k}\right)$$

(a) On pose, pour tout entier naturel $n\geq 1$, $v_n = \sqrt{n}\,u_n$.
Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(b) Étudier la nature de la série de terme général $w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note L sa limite.
Comparer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les réels u_n et $\frac{L}{\sqrt{n}}$.

2. On considère dans cette question la fonction $\varphi : x \longmapsto \varphi(x) = \sqrt{1-x}$ pour $x \in [0, 1]$.

(a) Déterminer la dérivée d'ordre n de $\varphi : x \longmapsto \varphi^{(n)}(x)$ pour $x \in [0, 1[$.

(b) Soit $x \in [0, 1[$. La formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à φ sur $[0, x]$ s'exprime sous la forme $\varphi(x) = P_n(x) + R_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré n et

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}\,dt$$

Exprimer les coefficients de P_n en fonction de n. Donner la valeur de P_4.

(b) Démontrer la majoration

$$\forall\, x \in [0, 1[,\ |R_n(x)| \leq \frac{1}{2}u_n \int_0^x (1-t)^{-1/2}\,dt$$

On pourra remarquer que $x - t \leq 1 - t$.
En déduire que

$$\forall\, x \in [0, 1[,\ |R_n(x)| \leq u_n$$

(c) Démontrer que la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction φ.

Dans la question suivante, on note Q_n le polynôme tel que $Q_n(x) = P_n(1 - x^2)$

(d) Soit ε un réel strictement positif et M une constante strictement positive.
Démontrer que si l'entier naturel N vérifie : $N \geq \frac{L^2M^2}{\varepsilon^2}$, alors

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ \big|\,|x| - Q_N(x)\big| \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

3. **On considère dans toute la suite du problème 1 une fonction f continue sur** $[0, 1]$ **et** ε **un réel strictement positif.**

On admet qu'il existe un entier naturel $n \geq 2$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1],\ |x - y| < \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Dans la suite du problème 1, n désigne l'entier ainsi défini.

(a) Soit g la fonction telle que

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ 0 \leq k \leq n,\ g\left(\frac{k}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$$

et g est affine sur chacun des intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq k \leq n-1$

Déterminer l'expression de $g(x)$ lorsque $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$.

(b) Démontrer que $\forall\ x \in [0, 1],\ |g(x) - f(x)| < \varepsilon$. On pourra remarquer que l'on peut écrire $g(x)$ sous la forme $g(x) = \alpha f\left(\frac{k}{n}\right) + (1 - \alpha) f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

3. Dans cette question, on considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, les matrices $A_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$:

$A_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 2 & 1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 & 2 \\ \vdots & & & 1 & 0 & 1 \\ n & \dots & \dots & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ de terme général $(a_{i,j} = |i - j|)_{1 \leq i, j \leq n+1}$

et $B_{n+1} \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ de terme général :

$$\begin{cases} b_{i,i} = -1 \text{ si } i \neq 1 \text{ et } i \neq n+1 \\ b_{1,1} = b_{n+1,n+1} = \dfrac{1-n}{2n} \\ \text{si } |i - j| = 1 \text{ alors } b_{i,j} = \dfrac{1}{2} \\ b_{1,n+1} = b_{n+1,1} = \dfrac{1}{2n} \\ b_{i,j} = 0 \text{ dans tous les autres cas} \end{cases}$$

On admettra que A_{n+1} est inversible et que $A_{n+1}^{-1} = B_{n+1}$: ce résultat est démontré en partie à la question 6.

(a) Soit E_{n+1} l'espace vectoriel des fonctions g définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que g soit affine sur chacun des intervalles $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, $0 \leq k \leq n-1$.

Soit d'autre part Φ l'application de E_{n+1} dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que

$$\forall\ g \in E_{n+1},\ \Phi(g) = \left(g\left(\frac{k}{n}\right)\right)_{0 \leq k \leq n}$$

Démontrer que Φ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et expliciter l'unique fonction $g_\alpha \in E_{n+1}$ telle que $\Phi(g) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ où $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

(b) Pour tout entier j, $0 \leq j \leq n$, on note $f_i \in E_{n+1}$ l'application

$$t \longmapsto f_j(t) = \left| t - \frac{j}{n} \right|$$

Montrer que la famille $(f_j)_{0 \leq j \leq n}$ est une base de E_{n+1} : on pourra par exemple expliciter la matrice de la famille des vecteurs $(\Phi(f_j))_{0 \leq j \leq n}$, dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

(c) Soit $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $g_\alpha \in E_{n+1}$ la fonction définie à la question 4°a), telle que $\forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $g_\alpha\left(\frac{k}{n}\right) = a_k$.

Démontrer qu'il existe $n+1$ réels $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall\, x \in [0, 1],\ g_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k f_k(x)$$

Déterminer la valeur des coefficients λ_k, $0 \leq k \leq n$ en fonction de $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$.

4. La lettre g désigne dans cette question la fonction étudiée à la question 3°a) et Q_N le polynôme obtenu à la question 2°e) pour la valeur $\varepsilon > 0$ et la valeur $M = \sum_{k=0}^{n} |\lambda_k|$.

(a) Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $g = g_\alpha$.
En déduire à l'aide de f la valeur des coefficients λ_k, $1 \leq k \leq n-1$, obtenus à la question 4°c).

(b) On pose

$$\forall\, x \in [0, 1],\ R(x) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k Q_N\left(x - \frac{k}{n}\right)$$

Démontrer que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - R(x)| \leq 2\varepsilon$$

(c) Quel théorème vient-on ainsi de démontrer ?

5. On revient sur la matrice A_{n+1} étudiée à la question 4.
Calculer $\det(A_{n+1})$ en fonction de n : on effectuera les opérations suivantes :
pour i allant de $n+1$ à 2 remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i - L_{i-1}$
pour j allant de 2 à $n+1$ remplacer la colonne C_j par la colonne $C_j + C_1$.
En déduire que A_{n+1} est inversible.

PROBLÈME 2

Dans ce problème on se propose d'étudier la fonction f qui au réel $x > 0$ associe

$$f(x) = \int_{[0,\, 2\pi[} \frac{\sin t}{\sqrt{4x^2 - t^2}}\, dt$$

1. Soit $x > 0$ fixé. Démontrer que la fonction $t \longmapsto h(t) = \dfrac{\sin t}{\sqrt{4x^2 - t^2}}$ est intégrable sue $[0, 2\pi[$.

2. Montrer que

$$\forall\, x > 0,\ f(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(2x.\sin(v))dv.$$

3. Montrer que la fonction f admet un prolongement continu sur $[0, +\infty[$, que l'on notera toujours f, et que cette fonction est de classe C^∞ sur $[0, +\infty[$.
Préciser $f^{(n)}(x)$ en fonction de n et de x sous forme d'une intégrale que l'on ne calculera pas.

4. On admet que $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \dfrac{2^{4n+1}(\text{n !})^2}{(2n+1)\ !}$

   (a) Déterminer la série de Taylor de f au point $x = 0$ sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$ et calculer son rayon de convergence.

   (b) Démontrer que pour x fixé, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}x^{2k+1}$ est alternée, et que la suite $\left| a_{2k+1}x^{2k+1} \right|$ est décroissante dès que $k > x - \dfrac{3}{2}$.

   (c) Les réels $x > 0$, $\varepsilon > 0$ étant fixés, écrire dans le langage informatique de votre choix, une suite d'instructions qui fournit une valeur approchée à ε près de $f(x)$ à l'aide de la suite $s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}x^{2k+1}$.
   On commencera par déterminer la valeur de n en fonction ε.

5. Montrer que pour tout entier naturel p et tout entier naturel k tel que $0 \le k \le p - 1$, on a :

$$\int_{[2k\pi,\, 2k\pi + 2\pi]} \frac{\sin t}{\sqrt{4p^2\pi^2 - t^2}} dt < 0$$

   En déduire le signe de $f(p\pi)$.

6. Déterminer pour tout entier naturel p le signe de $f\left(p\pi + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et en déduire que f s'annule une infinité de fois sur $[0, +\infty[$.